

Тема 1. Основни принципи на бройните системи. Бройна система с основа р

1. Бройни системи

Още в зората на човешката цивилизация възниква необходимостта от броене на хора и добитък, измерване на дължини, на участъци земя, оценяване на резултатите от реколтата и др. Появява се понятието **число**. Освен чрез словесно изговаряне, се създават и различни начини за записване на числата. Този процес протича успоредно с развитието на писмеността (записване на думите) и в известен смисъл е повлиян от него.

Бройната система е съвкупност от знакове и правила, чрез които се записват числата.

Бройните системи са връстници на човешката цивилизация. Ерата на компютрите, настъпила в наше време, с нова сила подчертава важността на това най-старо математическо откритие.

Хиляди години са били нужни на човека, за да изгради системите за броене, за именуване и записване на естествените числа. Нужни са му били няколко века, за да развие теорията на бройните системи и да изобрети и усъвършенства сметачната техника. И само за броени години той съумя да намери и най-важното днес приложение на бройните системи в съвременните компютри.

В продължителния и труден процес на осъзнаване на необходимостта от броене и смятане първите помощници на човека са били неговите пръсти. Природата го е дарила с този “инструмент”, като с това до голяма степен е предопределила и бройната система, в която да брои и извършва пресмятания с числа. Най-популярната и широко използвана бройна система е станала **десетичната бройна система**. Числата, записани в тази бройна система, се наричат десетични. Десетичната система е залегнала в основата на първите сметачни машини на Блез Паскал, Готфрид Лайбниц и много други. Системите за мерки и теглилки са най-различни, но често те са свързани с бройните системи. Днес употребяваната официално международна система **СИ** е под прякото влияние на десетичната бройна система

Използването на електричеството и електронните елементи в изчислителните машини показват неоспоримите предимства на **двоичната бройна система** пред всички останали. Така хората се отказват от традиционната десетична система, когато решават проблеми, свързани с автоматизацията на пресмятанията. А връзката на двоичната система с математическата логика и контактните схеми и огромните успехи на електрониката отвориха пътя за създаването на съвременните компютри с неподозирани възможности и фантастично бъдеще.

Троичната бройна система е сериозен конкурент на двоичната система в сметачната техника. **Дванадесетичната бройна система** в миналото е имала широко разпространение в търговията и мерните системи. Следите и виждаме у нас при групирането на предмети в дузини и гроси. С ограничена употреба е и **шестдесетичната бройна система**, разпространена някога във Вавилон и оставила ни делението на часа и градуса на 60 минути.

Р-ичните бройни системи са естествено обобщение на разгледаните конкретни системи. Тук виждаме общите свойства на бройните системи с

естествена основа и разбираме, че десетичната бройна система не е някаква особена бройна система и “виновни” за нейното разпространение са пръстите на ръцете на човека. Броят на цифрите в р-ичната бройна система и икономичността на системата имат свое значение за електронноизчислителните машини.

История на съвременните цифри

2. Десетична бройна система

Хората записват и извършват пресмятания с числа обикновено в десетична бройна система.

Човек се учи да брои най-често с помощта на пръстите на ръцете си. С тях може да се брои от едно до десет, като на всеки изброяван предмет се съпоставя по един от пръстите. Ако предметите са повече от десет, за да ги преброим, ние броим от едно до десет, запомняме или отбелязваме, че имаме една десетица, и продължаваме да броим, започвайки отново от едно. Получаваните десетици също броим от едно до десет, като десет десетици образуват една стотица, т.е. сто; десет стотици образуват хиляда и т.н.

Числото едно наричаме още единица от първи ред или проста единица и числата едно, две, ..., девет разглеждаме като съставени от такива единици. Тези числа означаваме най-често с т. нар. арабски цифри 1, 2, 3, ..., 9 към които причисляваме и цифрата нула - 0, която означава липса на единици.

Числото десет наричаме единица от втори ред, като числата десет, двадесет, ..., деветдесет разглеждаме съответно като една, две, ..., девет единици от втори ред и записваме отново с помощта на цифрите 1, 2, ..., 9, вдясно на които пишем и цифрата 0: 10, 20, ..., 90, и например записът 20 означава две единици от втори ред и нула единици от първи ред, а 25 – две единици от втори ред и пет единици от първи ред.

Числото 100 наричаме единица от трети ред и числата сто, двеста, ..., деветстотин разглеждаме като съставени от една, две, ..., девет единици от трети ред. Тези числа също записваме с цифрите 1, 2, ..., 9, последвани от две нули като знаци за липсващите единици от втори и първи ред.

По същия начин се разглеждат и числата, съставени от единици от по-висок ред, а например записът 2056 означава две единици от четвърти ред, нула единици от трети ред, пет единици от втори ред и шест единици от първи ред (четем: две хиляди петдесет и шест), което можем да изразим и чрез равенството:

$$2056 = 2 \cdot 1000 + 0 \cdot 100 + 5 \cdot 10 + 6.$$

Посредством действието степенуване числата 100, 1000, ... можем по-кратко да запишем като 10², 10³, ... и горното равенство ще добие вида:

$$2056 = 2 \cdot 10^3 + 0 \cdot 10^2 + 5 \cdot 10^1 + 6 \cdot 10^0$$

Числата от 1 до 999 наричаме числа от първи клас или от класа на простите единици; от 1000 до 999 999 – числа от втори клас или от класа на хилядите; числата от 1 000 000 до 999 999 999 принадлежат на класа на милионите (1 000 000 = 10⁶). Следващите класове и числа носят имена, които не се употребяват в еднакъв смисъл в различните страни.

За повече информация вижте [4] стр. 11

Имена на големите числа

Както вече отбелязахме азбуката на десетичните числа се състои от 10 знака, които се означават с 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 и се наричат цифри на десетичната бройна система. Числото 10 играе съществена роля в десетичната бройна система и се нарича основа на бройната система.

Множителят с който се изменя стойността на цифра, преместена в съседна позиция, се нарича ОСНОВА на позиционната бройна система.

Основата е равна на броя на различните използвани цифри.

Със същите цифри можем да запишем и други числа, например $370 = 3 \cdot 10^2 + 7 \cdot 10^1 + 0$. Ограничението $a_n \neq 0$ ни задължава да не разглеждаме например записа 037.

Запишете сами изрази, чрез които се представя числото 4729.

Последователността, в която се записват отделните цифри на всяко число, е съществена. Например числото 53 е различно от 35, въпреки че е съставено от същите цифри. ***Ясно е, че в представянето на число в десетична бройна система една и съща цифра има различни стойности в зависимост от мястото (позицията), което тя заема в числовия запис. Затова десетичната бройна система в писмен вид се нарича позиционна.*** Позициите на цифрите се наричат още разреди и се номерират (броят) в числовия запис отдясно наляво. Цифрата в първа позиция или от първи разред означава единиците от първи ред и т. н. Прието е единиците от първи ред да се записват най-вдясно.

Всяка цифра означава число, 10 пъти по-голямо от числото, което тя би означавала, ако беше с една позиция по-надясно.

Действията с числата в десетична бройна система са добре известни.

Приложение на десетичната бройна система

3. Двоична бройна система.

Броенете в десетична бройна система не е единственото възможно. Би могло да се брой по следната схема: “едно, две, две и едно, две – две, две – две и едно, две – две и две, две – две две и едно, ...”, където например “две – две” означава два пъти по две. Такова броене наричаме броене в двоична бройна система. По горната схема получаваме числовата редица

$$1, 2, 2+1=3, 2^2=4, 2^2+1=5, 2^2+2=6, 2^2+2+1=7, \dots,$$

която съвпада с редицата от естествени числа във възходящ ред.

Всяко естествено число може да се представи като сума от различни степени на числото 2 и това представяне е единствено.

Примери:

Нека $b=36$. Имаме единственото разлагане в сума от различни степени на двойката:

$$36 = 2^5 + 2^2, \text{ в което има липсващи степени на двойката. Това се вижда по-ясно}$$

като запишем равенството във вида:

$$36 = 1 \cdot 2^5 + 0 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0$$

Това равенство може да се запише още и така:

$$36 = a_5 \cdot 2^5 + a_4 \cdot 2^4 + a_3 \cdot 2^3 + a_2 \cdot 2^2 + a_1 \cdot 2^1 + a_0 \cdot 2^0,$$

където $a_5 = a_4 = 1$ и $a_3 = a_2 = a_1 = a_0 = 0$

Точно така в общия случай всяко естествено число b може да се запише еднозначно като сума по намаляващите степени на числото 2:

$$b = a_n \cdot 2^n + a_{n-1} \cdot 2^{n-1} + \dots + a_2 \cdot 2^2 + a_1 \cdot 2^1 + a_0 \cdot 2^0$$

където буквите a_i , $i=0, 1, 2, \dots, n$, имат стойности 0 или 1, като $a_n = 1$. Това е представяне в двоична бройна система или бройна система с основа 2^n . То може условно да се запише така:

$$b = \overline{a_n a_{n-1} \dots a_2 a_1 a_0}$$

Тук буквите a_i се наричат цифри; те означават цифрите на числото b и могат да бъдат числата 0 или 1 като коефициенти пред степените на числото 2. Следователно стойността, която те означават, зависи както от индивидуалността им (0 или 1), така и от мястото (позицията, разряда) в числовия запис. **Затова казваме още, че имаме позиционна двоична бройна система или позиционна бройна система с основа 2.** По аналогия с десетичната бройна система числото 1 ще наречем единица от първи ред, числото 2 – единица от втори ред, 2^2 – единица от трети ред и т. н., а съответните цифри ще определяме като цифри от първи, втори, трети и т. н. разред или позиция (a_0 – цифра от първи разред или първа позиция, a_1 – от втори разред и т. н.). Забележително тук е това, че две единици от даден ред дават единица от следващия по-висок ред, тъй като имаме общото равенство: $2 \cdot 2^k = 2^{k+1}$. При конкретни числови примери няма да пишем черта над записва.

Цифрите 0 и 1 наричаме двоични цифри.

Индекса 2, посочващ че имаме бройна система с основа 2, ще пишем за избягване на недоразумения с десетичната система. Можем да запишем $15 = 1111_{(2)}$, тъй като

$$1111_{(2)} = 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = 15;$$

$$\text{Също } 36 = 100100_{(2)},$$

$$\text{тъй като } 100100_{(2)} = 1 \cdot 2^5 + 0 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0 = 36.$$

Като други примери за записване на числата в двоична бройна система ще посочим степените на числото 2:

$$2 = 1_{(2)}; 2 = 10_{(2)}; 2 = 100_{(2)}; 2 = 1000_{(2)};$$

Опитайте се да запишете сами двоичното представяне на числата от 1 до 15.

[Представяне на числата от 1 до 100 в десетична, двоична, троична, осмична и шестнадесетична система](#)

[Електронни устройства за броене и записване на числата в двоична бройна система](#)

4. Други бройни системи

Разгледаните дотук десетична и двоична бройни системи са частни, но важни случаи на бройните системи. За различни цели могат да се използват и други бройни системи. Ще разгледаме троичната, осмичната и шестнадесетичната бройни системи.

а/ троична бройна система

Лесно се извежда аналогично на десетичната и двоичната бройна система, които разгледахме, че всяко естествено число b може да се представи във вида

$$b = a_n \cdot 3^n + a_{n-1} \cdot 3^{n-1} + \dots + a_2 \cdot 3^2 + a_1 \cdot 3 + a_0$$

където буквите a_i , $i=0, 1, 2, \dots, n$, имат стойности 0, 1 или 2, като $a_n \neq 0$. Това представяне е еднозначно.

Горното равенство записваме още и така:

и казваме, че b е записано в позиционна троична бройна система, а буквите a_i наричаме цифри или троични цифри. Когато цифрите са конкретни, черта над тях не се пише.

Примери:

В троична бройна система числото 66 се записва така:

$$66 = 2 \cdot 3^3 + 1 \cdot 3^2 + 1 \cdot 3^1 + 0 = 2110_{(3)}$$

В десетична бройна система числото 1201 се записва

$$\text{така } 1201_{(3)} = 1 \cdot 3^3 + 2 \cdot 3^2 + 0 \cdot 3^1 + 1 \cdot 3^0 = 46$$

Запомнете:

Цифрите в троичната бройна система са три и се означават със знаците: 0, 1 и 2.

б/ осмична бройна система

Числата в осмичната бройна система се записват с цифрите 0, 1, 2, ..., 7. Тези цифри са осем на брой. Основата на бройната система е 8.

Всяко естествено число b може да се представи във вида

$$b = a_n \cdot 8^n + a_{n-1} \cdot 8^{n-1} + \dots + a_2 \cdot 8^2 + a_1 \cdot 8^1 + a_0 \cdot 8^0$$

където буквите a_i , $i=0, 1, 2, \dots, n$, имат стойности 0, 1, 2, ..., 7 като $a_n \neq 0$. Това представяне е еднозначно. Горното равенство записваме още и така:

и казваме, че b е записано в позиционна осмична бройна система, а буквите a_i наричаме цифри или осмични цифри. Когато цифрите са конкретни, черта над тях не се пише.

Примери:

В осмична бройна система десетичните числа 66, 7 и 8 се записват така:

$$66 = 1 \cdot 8^2 + 0 \cdot 8^1 + 2 \cdot 8^0 = 107_8 \quad 7 = 7_8$$

$$8 = 1 \cdot 8^1 + 0 \cdot 8^0 = 10_8 \quad 9 = 1 \cdot 8^1 + 1 \cdot 8^0 = 11_8$$

в/ шестнадесетична бройна система

Цифрите в шестнадесетичната бройна система са 16 и е прието да се означават със знаците: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A (със стойност 10), B (със стойност 11), C (със стойност 12), D (със стойност 13), E (със стойност 14) и F (със стойност 15).

Всяко естествено число b може да се представи във вида

$$b = a_n \cdot 16^n + a_{n-1} \cdot 16^{n-1} + \dots + a_2 \cdot 16^2 + a_1 \cdot 16^1 + a_0 \cdot 16^0$$

където буквите a_i , $i=0, 1, 2, \dots, n$, имат стойности 0, 1, 2, ..., 9, A, B, C, D, E, F като $a_n \neq 0$. Това представяне е еднозначно. Горното равенство записваме още и така:

и казваме, че b е записано в позиционна шестнадесетична бройна система, а буквите a_i наричаме цифри или шестнадесетични цифри. Когато цифрите са конкретни, черта над тях не се пише.

Примери:

В шестнадесетична бройна система десетичните числа 17 и 31 се записват така:

$$17 = 11_8$$

$$16^1 + 1 \cdot 16^0 = 11_{(16)} \quad 31 = 1 \cdot 16^1 + F \cdot 1 = 1F_{(16)}$$

5. Класификация на бройните системи – позиционни и непозиционни бройни системи. Римска бройна система

Когато в запис на едно число стойността на цифрата зависи от нейната позиция, бройната система се нарича **позиционна** (от лат. position – място, положение).

Утвърждаването на позиционните бройни системи в ежедневната практика е продължило през дълъг период от развитието на човечеството. При тях чрез краен брой различни цифри могат да се записват произволни по стойност числа и не се налага за все по-големи числа, които се срещат в практиката да се измислят нови

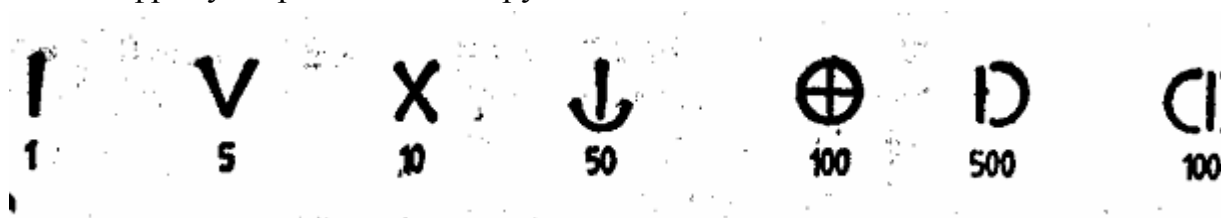
знакове. Друго важно преимущество на позиционните бройни системи е сравнително лесното извършване на аритметични операции с числата. **Дотук разгледаните бройни системи – десетична, двоична, троична, осмична и шестнадесетична са позиционни бройни системи.**

При непозиционните бройни системи отделните цифри запазват стойността си при формиране на стойността на числото независимо от позицията си. Примери за непозиционни бройни системи са вавилонската ([4] Бройни системи стр. 261), римската, старобългарската.

Римска бройна система

Великата римска империя развила много клонове на изкуството и науката с изключение на математиката. Имало велики поети, юристи, архитекти, но нямало математици. Римляните не изпитвали влечение към математически размишления. Макар че римската номерация се запазила до наши дни, тя така си останала без усъвършенствания.

В Италия преди римляните са живели етруските. От многобройните техни писмени паметници се извличат цифрите, с които те са означавали числата. Ето първите 7 цифри, употребявани от етруските:



Римляните възприели цифрите на етруските и ги отъждествили с букви от своята азбука. Затова цифрите V и X не произхождат от латинската азбука. Етруските избрали знака V за означаване на числото 5 вероятно, защото той наподобява китката на ръката или пък формата на ръката, свита в лакътя, с което напомня за петте пръста на ръката. Знакът X наподобява формата на две кръстосани ръце, с което се напомня за десетте пръста. Знакът за 100 – C, бил естествено свързан с първата буква на съответното римско числително centum. За знак на 1000 римляните въвели началната буква M на числителното mille, mile (хиляда).

Етруските използвали повече цифри, но римляните се задоволявали само със седемте. С тях могат да се записват числата от 1 до 4999. По-големите числа римляните записвали “по своему”, както можели. Предполага се, че етруските са имали навика да броят чрез разделяне, поради което знакът за 500 се е получил като “половинка” на знака за 1000. Някои предполагат, че по същия начин се е получил и знакът на 5 от този на 10.

Римската номерация може накратко да се опише така:

Използват се цифрите I, V, X, L, C, D, M съответно за числата 1, 5, 10, 50, 100, 500, 1000. До всяка цифра могат да се поставят отдясно до три еднакви цифри, означаващи по-малки числа, които да бъдат събирани с основната цифра, и най-много една отляво, която да бъде изваждана.

Например:

X – 10; XI – 11, т.е. 10+1; XII – 12, т.е. 10+2; XIII – 13, т.е. 10+3; но XIV – 14, т.е. 10+(5-1); XVIII – 18, т.е. 10+(5+3).

Това своеобразие в означаването на числата се дължи на навика да се брои

чрез събиране и даже чрез изваждане. Понякога даже числото 18 (а не само 19) е било записано посредством изваждане, а именно ПХХ в точно съответствие с латинското числително за 18.

Тъй като римската бройна система е непозиционна всяка цифра запазва стойността си, независимо в коя позиция на числото е записана. Например I е винаги 1, независимо дали е в запис IV или VI. В първия случай единицата се вади от 5 и се получава 4, а във втория единицата се прибавя към 5 и се получава 6.

6. Съществуване и единственост на представянето на числата

Основни въпроси, които възникват за всяка бройна система, са:

- може ли всяко число да се запише в съответната бройна система (съществуване);
- възможно ли е два различни записа да представят едно и също число (единственост).

Отговор на тези въпроси дава следната **основна теорема**:

Нека p е естествено число, $p \geq 2$. Тогава всяко

естествено число N може да се представи във вида:

$$N = a_n \cdot p^n + a_{n-1} \cdot p^{n-1} + \dots + a_2 \cdot p^2 + a_1 \cdot p^1 + a_0,$$

където $a_n \neq 0$, $0 \leq a_i \leq p-1$, $i=0, 1, 2, \dots, n$; и това представяне е единствено.

За да се гарантира единственост, е съществено изискването старшата цифра a_n да не е нула. Иначе числото 16 например ще може да се представи по различни начини: 016, 0016, 00016 и т.н. Формулираната теорема позволява да се конструират и други позиционни бройни системи с основа $p \neq 10$.

7. Сравняване на бройните системи. Защо двоичната бройна система има важно значение?

Основната теорема ни показва, че от гледна точка на въпроса за съществуване и единственост, представянията на числата в позиционните бройни системи с различни основи са равноправни. При оценка на бройните системи се вземат предвид две основни обстоятелства – икономичност и удобство при експлоатация.

Икономичността при представяне на числата обикновено се измерва с произведението от броя на заеманите позиции и броя на различните цифри. Това е така, защото и в компютрите, и в другите автоматични устройства може усреднено да се приеме, че цената за реализиране на една позиция е пропорционална на броя на цифрите, които могат да се представят в една позиция.

Удобството при *експлоатация* е оценка за лекотата за представяне на числата и изпълнение на операции с тях.

Двоичната бройна система има преимущества спрямо десетичната бройна система и по двата показателя. Например, ако ще работим с естествени числа до един милион в десетичната бройна система, ще ни трябват 6 позиции, всяка от които трябва да допуска представянето на 10 различни цифри. Общата оценка за икономичността е $6 \times 10 = 60$. За същите числа в двоична бройна система ще са необходими 20 позиции, защото $2^{20} = 1\,048\,576 > 1\,000\,000$. Всяка от тях ще съдържа едно от двете цифри 0 или 1. Следователно двоичната бройна система ще е по-икономична, защото $20 \times 2 = 40 (< 60)$.

Троичната бройна система е по-икономична от двоичната.

По отношение на удобството за извършване на аритметичните операции е достатъчно да си спомним колко

по-прости са таблиците за събиране и умножение в двоичната бройна система в сравнение с десетичната.

Двоичната бройна система има и друго важно преимущество. Между нея и логическите функции (които ще разгледаме по-нататък) има съществени връзки.

Поради тези преимущества двоичната бройна система е основна за компютрите и за съвременните телекомуникационни системи.

Защо хората продължават да използват десетичната бройна система?

Основни причини за това са създадените навици, обстоятелството, че десетичната бройна система се използва широко в книгите, в документацията, в различните измервателни устройства и др. Важно значение има и фактът, че за хората е по-удобно да пишат и ползват числа с по-малък брой цифри, както и че ще допускаме повече грешки, ако работим с числа, записани само с нули и единици.

Реализирането на устройства с две стабилни състояния е практически по-просто, поради което съвременните компютри използват позиционни бройни системи с основа 2.

[следваща тема](#)